

Quiz 3

Ιωαννίδης Νικόλαος

AEM: 690

Άσκηση 1:

a) Διάνυσμα κλίσης gradient

$f(x, y)$ **πραγματική συνάρτηση 2 μεταβλητών.**

$(\frac{df}{dx}(c_1, c_2), \frac{df}{dy}(c_1, c_2))$ **διάνυσμα κλίσης της f στο σημείο (c_1, c_2) και συμβολίζεται με ∇f .**

Άρα $\nabla f = (\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy})^T = 8(2x - 4y)^3 + 2xe^{(x^2-2y)} - 16(2x - 4y)^3 - 2e^{(x^2-2y)}.$

Hessian

$$H = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} [1] & [2] \\ [3] & [4] \end{bmatrix}.$$

[1]: $\frac{d^2 f}{dx^2} = 48(2x - 4y)^2 + 4x^2 e^{x^2-2y} + 2e^{x^2-2y}$

[2]: $\frac{d^2 f}{dy^2} = 192(2x - 4y)^2 + 4e^{x^2-2y}$

[3]: $\frac{d^2 f}{dxdy} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy} \right) = -96(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2-2y}$

[4]: $\frac{d^2 f}{dydx} = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dx} \right) = -64(2x - 4y)^2 - 4xe^{x^2-2y}$

b) Από Taylor έχω:

$$T(x) = f(a) + (x - a)^T * Df(a) + \frac{1}{2!} (x - a)^T * D^2 f(a) * (x - a) + \dots$$

Για $x = 1, y = 1$:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x, y) + (x - 1) \frac{df}{dx} + (y - 1) \frac{df}{dy} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((x - 1)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + (x - 1) \frac{df}{dx dy} + (y - 1) \frac{df}{dx dy} + (y - 1)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

c) Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν:

$$f(ax_1 + (1 - a)x_2) \leq af(x_1) + (1 - a)f(x_2), \forall 0 \leq a \leq 1.$$